

5)

Ejercicio 1.º

La columna, cuya forma, dimensiones y cargas, se indican en la figura II-8 está formada por un cilindro hueco de acero de 10 cm de radio interior y 40 cm de radio exterior. Este acero tiene un módulo de elasticidad de valor $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de valor $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kg/cm}^2$. El hueco se rellena de un hormigón de módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y de tensión admisible $\sigma_{hadm} = 160 \text{ kg/cm}^2$, de tal manera que se supone que hormigón y acero trabajan solidariamente unidos.

Sobre el eje del cilindro conjunto, actúa una fuerza de $P \text{ Tn}$.

Se pide: Prescindiendo de las deformaciones transversales (normales al eje del cilindro) hallar:

- 1.º) Esfuerzo axial que actúa sobre cada material.
- 2.º) Acortamiento total del cilindro.
- 3.º) Máximo valor de P que puede soportar la pieza.

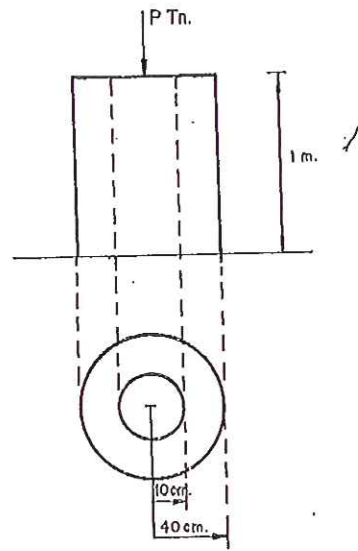


Fig. II-8

Resolución:

Puesto que se supone que el hormigón y el acero están solidariamente unidos, la fuerza de $P \text{ Tn}$ ha de producir el mismo acortamiento en el hormigón y en el acero, luego, como ambos cilindros tienen la misma longitud, se cumplirá:

$$\epsilon_{za} = \epsilon_{zh}$$

y según la ley de Hooke:

$$\frac{\sigma_{za}}{E_a} = \frac{\sigma_{zh}}{E_h}$$

$$\text{o bien: } \sigma_{za} = 10 \cdot \sigma_{zh}$$

Es decir, la igualdad de deformaciones nos proporciona una relación entre la tensión en cualquier punto del acero y cualquier punto del hormigón. Pues bien, si consideramos uno de los materiales, por ejemplo, el acero, podemos razonar de la siguiente manera:

La máxima tensión a que puede trabajar el acero es a la admisible, es decir, a 2400 kg/cm^2 . Pero si el acero trabaja a 2400 kg/cm^2 , el hormigón, por la relación anterior ha de trabajar a 240 kg/cm^2 , cosa que es imposible puesto que su tensión admisible es 160 kg/cm^2 . Por lo tanto, no tenemos más remedio que desperdiciar parte de la capacidad resistente del acero. Aprovechando al máximo el hormigón, que es lo más que podemos hacer, lo haremos trabajar, a 160 kg/cm^2 , con lo que el máximo esfuerzo axial que puede absorber es

$$P_h = 160 \cdot \pi \cdot 10^2 = 50.256 \text{ kg} = 50,256 \text{ Tn.}$$

Como el acero trabaja a 1600 kg/cm^2 ; el axial que puede absorber el acero es

$$P_a = 1600 \cdot \pi (40^2 - 10^2) = 7538,4 \text{ Tn.}$$

Por tanto, el máximo esfuerzo axial que puede soportar toda la pieza, será:

$$P = P_a + P_h = 7588,656 \text{ Tn.}$$

El acortamiento total de la pieza será el que tenga el acero, o bien, el que tenga el hormigón. Trabajando con este último tenemos:

$$\Delta L = \epsilon_{zh} \cdot L = \frac{\sigma_{zh}}{E} \cdot L = \frac{160}{2 \cdot 10^5} \cdot 100 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

*

6)

Ejercicio 2.º

La barra ABD de la figura II-9 tiene rigidez infinita (no se deforma elásticamente y, por tanto, se comporta como un sólido rígido de Mecánica). Las barras CB y ED son de acero de 4 cm^2 de sección, de $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ de módulo de elasticidad y de tensiones admisibles:

$$\sigma_{adm} \text{ (BC)} = 2400 \text{ kg/cm}^2 ; \quad \sigma_{adm} \text{ (ED)} = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

En el punto medio de BD existe una carga vertical y hacia abajo de P Tn.

Se pide:

- 1.º) Máximo valor de P que puede soportar la estructura.
- 2.º) Angulo girado por la barra AD cuando el valor de P es el obtenido en el apartado anterior.

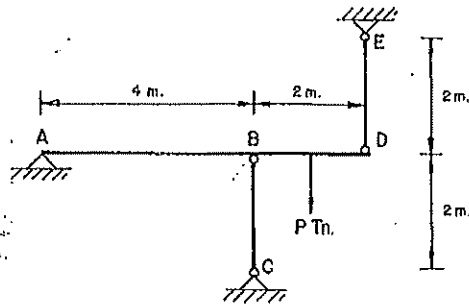


Fig. II-9

Resolución:

La carga P produce un giro en sentido horario en la barra AD (que gira, pero no se deforma, quedando por lo tanto recta), a costa de producir un acortamiento en la barra BC y un alargamiento en la barra ED. Después del movimiento de la barra AD, la estructura quedará de la forma representada en la figura II-10, de tal forma, que por semejanza de triángulo los obtenemos:

$$\frac{\Delta_2}{6} = \frac{\Delta_1}{4}$$

o bien: $\Delta_2 = 1,5 \Delta_1$.

Por otra parte, las deformaciones unitarias de las barras serán: (trabajando en metros)

$$\epsilon_2 = \frac{\Delta_2}{2}; \quad \epsilon_1 = \frac{\Delta_1}{2}$$

luego $\epsilon_2 = 1,5 \epsilon_1$ y según la ley de Hooke, y puesto que ambas barras tienen el mismo módulo de elasticidad, resulta:

$$\sigma_2 = 1,5 \sigma_1$$

El valor máximo de P lo obtendremos con la condición de que, al menos, una de las dos barras trabaje a la tensión admisible. Si la barra BC trabaja a la tensión admisible; es decir, a 2400 kg/cm², la ED tendría que trabajar (según la última relación de tensiones obtenida) a 3600 kg/cm², cosa que no es posible puesto que su tensión admisible es de 2000 kg/cm². Luego dicha barra ED trabajará a 2000 kg/cm² y la barra BC a 1333,333 kg/cm².

Por tanto:

Sobre la barra BC actúa una fuerza de compresión de valor:

$$1333,333 \cdot 4 = 5333,33 \text{ kg} = 5,33 \text{ Tn.}$$

Sobre la barra ED actúa una fuerza de tracción de valor:

$$2000 \cdot 4 = 8000 \text{ kg} = 8 \text{ Tn.}$$

Por el principio de acción y reacción, las fuerzas que actúan sobre la barra AD serán las representadas en la figura II-11, y como se trata de un sólido rígido con un punto fijo, la condición de equilibrio da:

$$8 \cdot 6 - P \cdot 5 + 5,33 \cdot 4 = 0$$

de donde:

$$P = 13,864 \text{ Tn.}$$

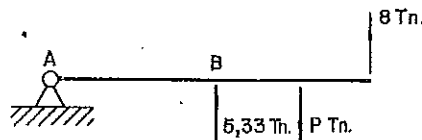


Fig. II-11

Para hallar el ángulo girado por la barra AD, no tenemos más que hallar Δ_1 ó Δ_2 . Si lo obtenemos a partir de Δ_1 , tenemos:

$$\Delta_1 = \epsilon_1 \cdot L_1 = \frac{\sigma_1}{E} \cdot L_1 = \frac{1333,333}{2 \cdot 10^6} \cdot 200 = 0,1333 \text{ cm.}$$

Luego el ángulo girado por la barra AD, será:

$$\Theta = \frac{0,1333}{400} = 0,333 \cdot 10^{-3} \text{ radianes.}$$

7)

Ejercicio 3.º

En la estructura formada por tres barras articuladas en sus extremos y representada en la figura II-12, las barras laterales tienen una sección de 5 cm^2 , un módulo de elasticidad de $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de 2200 kg/cm^2 . La barra central tiene una sección de 8 cm^2 , un módulo de elasticidad de $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de 2000 kg/cm^2 .

Se pide:

- 1.º) Máximo valor de P que puede soportar la estructura.
- 2.º) Corrimiento vertical del punto A, para este valor máximo de P .

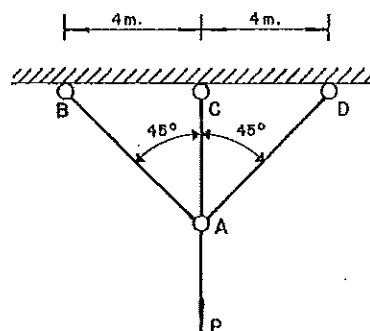


Fig. II-12

Resolución:

Vamos a comenzar, como en los casos anteriores, por hallar una relación entre las tensiones que actúan sobre cada barra y para ello hemos de obtener previamente una relación entre las deformaciones. El punto A (fig. II-12) tendrá, como consecuencia de la actuación de la carga P , un descenso vertical valor Δ , desconocido (fig. II-13 (a)), con lo que las barras laterales, habrán experimentado un alargamiento, de valor:

$$\Delta_1 = \Delta \cdot \cos 45^\circ = \Delta \cdot 0,707$$

La deformación unitaria de las barras laterales será:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta_1}{L_1} = \frac{\Delta_1}{4\sqrt{2}} = \frac{\Delta_1}{5,656}$$

La deformación unitaria, de la barra central será:

$$\epsilon = \frac{\Delta}{4}$$

luego se cumple:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta_1}{5,656} = \frac{\Delta \cdot 0,707}{5,656} = \frac{\Delta \cdot 0,707}{5,656} \cdot \frac{4}{4} = \epsilon \cdot 0,5$$

y como los módulos de elasticidad son iguales para todas las barras, resulta:

$$\sigma_1 = 0,5 \sigma$$

Por tanto, por el mismo razonamiento que hicimos en los problemas anteriores, la barra central trabaja a 2000 kg/cm^2 y las laterales a 1000 kg/cm^2 . Las acciones que el nudo A ejercerá sobre ellas serán:

Sobre las barras laterales, una tracción de:

$$1000 \cdot 5 = 5000 \text{ kg} = 5 \text{ Tn.}$$

Sobre la barra central, una tracción de:

$$2000 \cdot 8 = 16000 \text{ kg} = 16 \text{ Tn.}$$

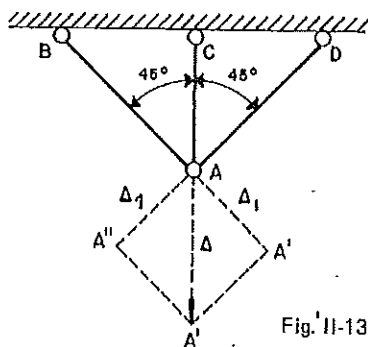


Fig. II-13 (a)

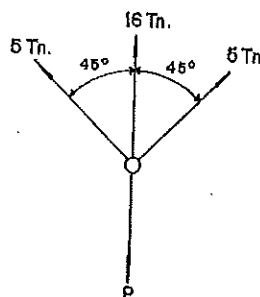


Fig. II-13 (b)

El equilibrio del nudo A (fig. II-13 (b)) da:

$$P = 16 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 23,07 \text{ Tn.}$$

El corrimiento vertical de A será:

$$\downarrow V_A = \epsilon \cdot L_{AC} = \frac{\sigma}{E} L_{AC} = \frac{2000}{2 \cdot 10^6} \cdot 400 = 0,4 \text{ cm.}$$

*

8)

Ejercicio 4.º

En la estructura representada en la figura II-14, las barras laterales tienen un coeficiente de dilatación térmica, de valor:

$$\alpha_1 = 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

mientras que la barra central tiene

$$\alpha_2 = 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

El conjunto se somete a un incremento de temperatura de valor

$$\Delta T = 100^\circ\text{C}$$

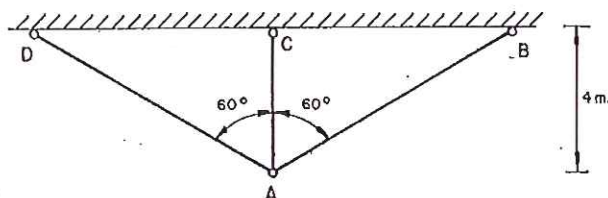


Fig. II-14

Se pide:

- 1.º) Esfuerzos en cada barra.
- 2.º) Corrimiento vertical del punto A.

Las secciones de todas las barras son 2 cm^2 y el módulo de elasticidad es para todas las barras: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Resolución:

Si aislamos el punto A, cada una de las barras que concurren en él ejercerá una acción, según la dirección de cada barra y de tal manera que el punto A, esté en equilibrio. Por simetría sabemos que las acciones de las barras laterales sobre A, serán iguales. Si establecemos el equilibrio de dicho punto (fig. II-15), obtenemos:

$$2F_1 \cdot \cos 60^\circ + F_2 = 0$$

o bien:

$$F_1 + F_2 = 0$$

que es la única relación de estática que podemos aplicar y que si bien nos da una relación entre F_1 y F_2 , no nos da el valor de ninguna de ambas fuerzas. Tenemos pues, que recurrir a condiciones de corrimientos para obtener sus valores.

Si obligamos a que el corrimiento vertical del punto A, como perteneciente a la barra AC (fig. II-14), sea igual y del mismo sentido que el corrimiento vertical de A, como perteneciente a las barras AD y AB, tenemos la relación que nos falta.

El corrimiento vertical de A, como perteneciente a la barra AC, será (fig. II-16):

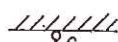


Fig. II-16

- a) debido a la fuerza F_2 (trabajando en kg y cm):

$$\downarrow \Delta'_2 = \epsilon_2 \cdot L_{AC} = \frac{\sigma_2}{E} L_{AC} = \frac{F_2}{E\Omega} L_{AC} = \frac{F_2 \cdot 400}{2 \cdot 10^6 \cdot 2} \text{ cm};$$

- b) debido a la temperatura

$$\downarrow \Delta''_2 = \alpha_2 \cdot L_{AC} \cdot \Delta T = 10^{-6} \cdot 400 \cdot 100 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Por tanto, el total será:

$$\downarrow V'_A = F_2 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Vamos ahora a obtener el corrimiento vertical de A, como perteneciente a las barras AD y AB (fig. II-17).

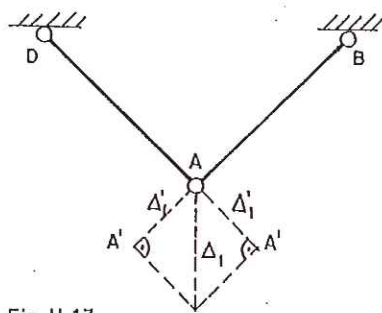


Fig. II-17

Razonando igual que antes, tenemos:

$$\begin{aligned} AA' = \Delta'_1 &= \frac{F_1 \cdot L_{AD}}{E \cdot \Omega} + \alpha_1 L_{AD} \Delta T = \\ &= \frac{F_1 \cdot 800}{2 \cdot 10^6 \cdot 2} + 10^{-4} \cdot 800 \cdot 100 = \\ &= 2 F_1 \cdot 10^{-4} + 8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Por tanto, como:

$$\Delta_1 \cos 60^\circ = \Delta'_1 \quad \text{resulta:}$$

$$\Delta_1 = 2 \cdot \Delta'_1 = 4 \cdot F_1 \cdot 10^{-4} + 16$$

Igualando ambos corrimientos verticales, queda:

$$F_2 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-2} = 4 F_1 \cdot 10^{-4} + 16$$

o bien:

$$F_2 + 400 = 4 F_1 + 16 \cdot 10^4$$

ecuación, que con la de la estática $F_1 + F_2 = 0$, obtenida anteriormente, nos da:

$$F_1 = -31920 \text{ kg} = -31,92 \text{ Tn}$$

$$F_2 = 31,92 \text{ Tn}$$

Como F_1 sale negativa, quiere decir que va en sentido contrario al dibujado en la figura II-16. Por tanto, las barras laterales trabajan a una compresión de 31,92 Tn y la central a una tracción de 31,92 Tn.

El corrimiento vertical del punto A en la estructura real (tomándolo, por comodidad, como perteneciente a la barra AC), será:

$$\downarrow V_A = 31,92 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-2} = 3,232 \text{ cm.}$$

*

9)

Ejercicio 5.

El tronco de cono, cuyas dimensiones se indican en la figura II-18 tiene un peso específico de valor:

$$\gamma = 2,5 \text{ Tn/m}^3$$

y un módulo de elasticidad,

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Descansa sobre un plano, por su cara CD.

Se pide:

Acortamiento total del tronco de cono.

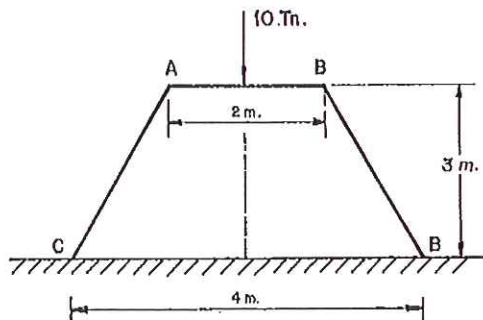


Fig. II-18

Resolución:

La carga puntual de 10 Tn y el peso propio influyen en el acortamiento. Como el peso que actúa por encima de cada sección varía, vamos a considerar el acortamiento total, como suma de los acortamientos de los infinitos elementos diferenciales, como el A'B'C'D' de la figura II-19.

Sea S_{AB} el área de la sección AB y S_x , la de la sección A'B'. El volumen limitado entre AB y A'B' será:

$$V = \frac{1}{3} S_x (H + x) - \frac{1}{3} S_{AB} \cdot H$$

Pero por semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{3+H} = \frac{2}{H} \quad \text{de donde} \quad H = 3 \text{ m.}$$

Por otra parte, el radio r_x de la sección S_x lo obtendremos mediante la relación:

$$\frac{r_x}{3+x} = \frac{1}{3}$$

$$\text{luego} \quad r_x = \frac{3+x}{3}$$

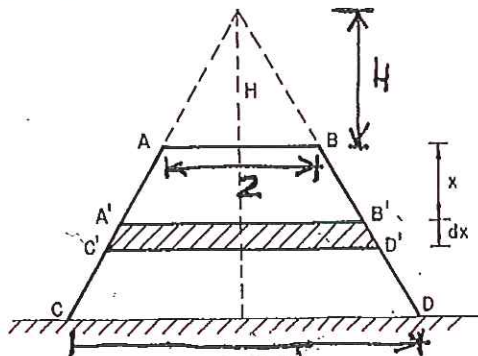


Fig. II-19

En definitiva será:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3+x}{3} \right)^2 (3+x) - \frac{1}{3} \pi \cdot 3 = \pi \left[\frac{(3+x)^3}{27} - 1 \right]$$

El peso de este volumen será:

$$P_V = \pi \left[\frac{(3+x)^3}{27} - 1 \right] \cdot 2,5$$

Luego el peso total que incide sobre la superficie A'B' será:

$$P = \pi \left[\frac{(3+x)^3}{27} - 1 \right] \cdot 2,5 + 10$$

El acortamiento que esta acción ejerce sobre la rebanada A'B'C'D' será:

$$\delta x = \frac{P \cdot dx}{E \Omega} = \frac{P dx}{E \cdot S_x} = \frac{\left[\pi \left[\frac{(3+x)^3}{27} - 1 \right] \cdot 2,5 + 10 \right] dx}{E \cdot \pi \left(\frac{3+x}{3} \right)^2}$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = 3$, tenemos el acortamiento total de la pieza

$$\Delta = 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ metros.}$$

*

10)

Ejercicio 7º

Las barras AA' y CC' de la estructura de la figura II-22 tienen una sección de 6 cm^2 y módulo de elasticidad de $2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. La barra BB' de la misma estructura tiene una sección de 4 cm^2 y módulo de elasticidad de $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

La barra horizontal ABC es infinitamente rígida y sobre ella actúa una fuerza de 10 Tn .

Se pide:

Esfuerzo que actúa sobre cada una de las tres barras verticales.

Resolución:

Como las deformaciones en las tres barras han de ser iguales, resulta:

$$\epsilon_{AA'} = \frac{\sigma_{AA'}}{E_{AA'}} = \frac{\sigma_{CC'}}{E_{CC'}} = \epsilon_{CC'}$$

$$\epsilon_{BB'} = \frac{\sigma_{BB'}}{E_{BB'}}$$

Igualando y sustituyendo los valores de los módulos de elasticidad:

$$\epsilon_{AA'} = \frac{\sigma_{AA'}}{2 \cdot 10^5} = \frac{\sigma_{CC'}}{2 \cdot 10^5} = \epsilon_{CC'}$$

$$\epsilon_{BB'} = \frac{\sigma_{BB'}}{2 \cdot 10^6}$$

$$\sigma_{BB'} = 10 \sigma_{AA'} = 10 \sigma_{CC'}$$

Como, por otra parte, por equilibrio de la barra horizontal ha de cumplirse:

$$\sigma_{AA'} \cdot \Omega_{AA'} + \sigma_{BB'} \cdot \Omega_{BB'} + \sigma_{CC'} \cdot \Omega_{CC'} = 10.000 \text{ kg}$$

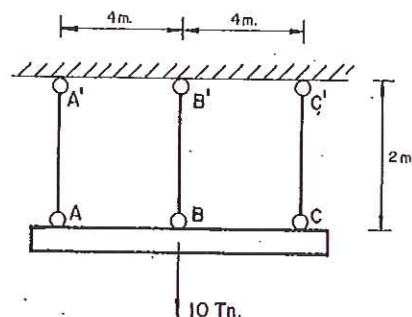


Fig. II-22

o bien:

$$\sigma_{AA'} \cdot 6 + \sigma_{BB'} \cdot 5 + \sigma_{CC'} \cdot 4 = 10.000 \text{ kg}$$

resulta:

$$\sigma_{AA'} = \sigma_{CC'} = 192,308 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{BB'} = 1923,08 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre las barras laterales, será:

$$P_1 = 192,308 \cdot 6 = 1153,848 \text{ kg}$$

y la que actúa sobre la barra central, será:

$$P_2 = 1923,08 \cdot 4 = 7692,32 \text{ kg.}$$

*

Ejercicio 8.º

En la pieza de la figura II-23, las cargas actúan según la dirección del eje. La sección A tiene un área transversal de $3,2 \text{ cm}^2$ y módulo de elasticidad $1,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$; la sección B tiene un área transversal de $6,4 \text{ cm}^2$ y módulo de elasticidad de $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y la sección C tiene un área transversal de $2,5 \text{ cm}^2$ y módulo de elasticidad de $0,98 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Se pide:

Alargamiento total de la pieza.

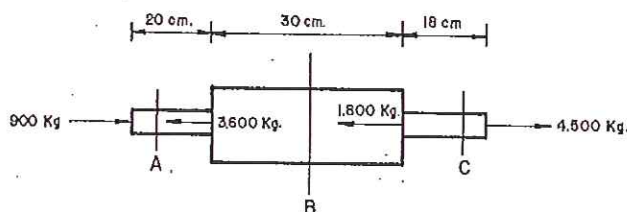


Fig. II-23

Resolución:

Tomando los alargamientos con signo positivo, y los acortamientos con signo negativo y aislando cada uno de los tres trozos (poniendo las acciones que el resto de la pieza produce sobre ellos), obtenemos:

$$\delta = -\frac{900 \times 20}{3,2 \cdot 1,1 \cdot 10^6} + \frac{2700 \cdot 30}{6,4 \cdot 2,1 \cdot 10^6} + \frac{4500 \cdot 18}{2,5 \cdot 0,98 \cdot 10^6} = 0,34 \text{ cm.}$$

*

Ejercicio 9.º

En la estructura, cuya forma, dimensiones y cargas se indican en la figura II-24, todas las

barras tienen la misma sección transversal y el mismo módulo de elasticidad.

Se pide:

Esfuerzo en cada una de las barras.

Resolución:

Por ser del tipo de los resueltos anteriormente, el lector comprobará que la solución es:

$$F_{BD} = 2,223 \text{ Tn.}$$

$$F_{AD} = F_{CD} = 1,423 \text{ Tn.}$$

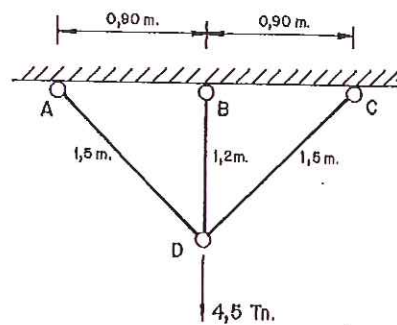


Fig. II-24

*

13)

Ejercicio 10.

Una sección de una viga, cuya forma y dimensiones se indican en la figura II-27 está sometida a un momento flector M aplicado en el centro de gravedad O de la sección y que forma 45° con el eje Ox , y de tal forma que $M = 10 \text{ mTn}$.

Se pide:

- 1.º) Valor y sentido de la tensión normal en los puntos I, C.
- 2.º) Ecuación de la fibra neutra.
- 3.º) Puntos de máxima tensión normal.

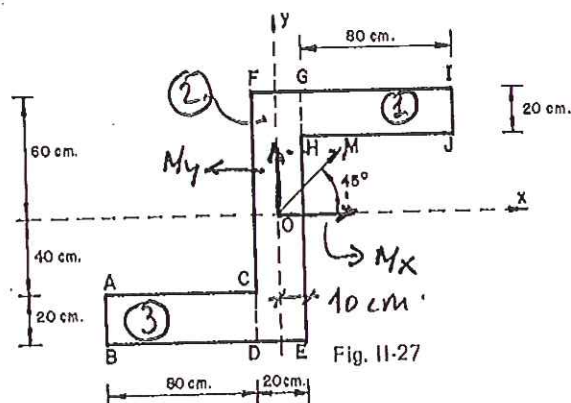


Fig. II-27

Resolución:

La tensión en un punto cualquiera la obtendremos aplicando la expresión [II-10], donde

$$M_x = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,07 = M_y$$

Además tendremos que determinar los momentos de inercia I_x , I_y , y el producto de inercia I_{xy} , de tal forma que, si éste es nulo, los ejes Ox , Oy son principales de inercia:

Vamos a comenzar por los momentos de inercia:

$$(I_x)_{DEGF} = \frac{20 \cdot (120)^3}{12}; \quad (I_x)_{HGIJ} = (I_x)_{ABDC} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 80 \cdot 20 \cdot (50)^2;$$

$$\text{Por tanto } I_x = \frac{20 \cdot (120)^3}{12} + 2 \left[\frac{80 \cdot 20^3}{12} + 80 \cdot 20 \cdot (50)^2 \right] = 10,986 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$(I_y)_{DEGF} = \frac{120 \cdot 20^3}{12}; \quad (I_y)_{HGIJ} = (I_y)_{ABDC} = \frac{20 \cdot 80^3}{12} + 20 \cdot 80 \cdot (50)^2;$$

$$\text{Por tanto } I_y = \frac{120 \cdot 20^3}{12} + 2 \left[\frac{20 \cdot 80^3}{12} + 20 \cdot 80 \cdot (50)^2 \right] = 9,786 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Vamos ahora a hallar el producto de inercia I_{xy} . Para ello, si tenemos en cuenta que el producto de inercia de un área respecto de un sistema de ejes coordenados, es nulo si, al menos, uno de los ejes es de simetría (ésta es una condición suficiente pero no necesaria), resulta:

$$(I_{xy})_{DEGF} = 0$$

$$(I_{xy})_{ABDC} = (I_{xy})_{HGIJ} = \int_{x=10}^{x=90} \int_{y=40}^{y=60} xy \, dx \, dy = \int_{10}^{90} x \, dx \int_{40}^{60} y \, dy = 4 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Por lo tanto:

$$I_{xy} = 8 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum x \cdot y \cdot A =$$

$$= 90 \cdot 50 \cdot (80 \times 20) + 0 + (-90) \cdot (-50) \cdot (80 \times 20)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & A \\ \hline \text{Rectángulo ①} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & A \\ \hline \text{Rectángulo ③} \end{array}$$

$$\text{Rectángulo ② } x=y=0$$

Sustituyendo los valores de M_x , M_y , I_x , I_y , I_{xy} en la expresión [II-10] queda (trabajando en cm y kg), resulta:

$$\sigma_z = 0,289 y - 0,309 x$$

Por consiguiente, las tensiones en los puntos I, C las obtendremos sustituyendo, en la expresión anterior, las coordenadas de dichos puntos

$$(\sigma_z)_I = 0,289 \cdot 60 - 0,309 \cdot 90 = -10,47 \text{ kg/cm}^2 \text{ de compresión, por resultar con signo negativo.}$$

$$(\sigma_z)_C = 0,289 \cdot (-10) - 0,309 \cdot (-40) = 9,47 \text{ kg/cm}^2 \text{ de tracción, por resultar con signo positivo.}$$

La fibra neutra es la recta:

$$0,289 y - 0,309 x = 0$$

o bien: $y = 1,037 x$.

Los puntos de máxima tensión normal, en valor absoluto, son los más alejados de la fibra neutra, es decir, F y E.

*

Ejercicio 14

Una sección de una pieza consiste en la corona circular representada en la figura II-28, sometida a un momento $\vec{M}$ definido por un vector que forma 60° con la dirección positiva del eje Ox.

El material tiene unas tensiones admisibles dadas por los siguientes valores:

a compresión: $\sigma_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

a tracción: $\sigma_T = 80 \text{ kg/cm}^2$

Se pide:

Valor máximo de $|\vec{M}|$ que puede soportar la sección.

Resolución:

La pieza tiene simetría radial, luego cualquier sistema de ejes coordenados que elijamos serán principales de inercia. Vamos pues, a tomar como ejes, en vez de los representados en la figura II-28, los representados en la figura II-29, con lo que tendremos:

$$M_x = |\vec{M}| ; \quad M_y = 0 ; \quad I_{xy} = 0$$

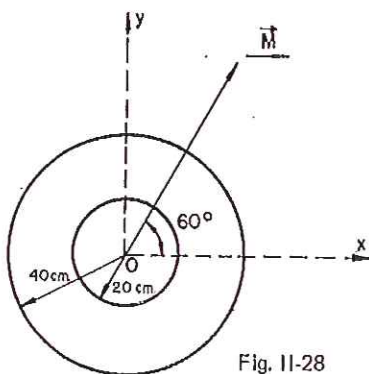


Fig. II-28

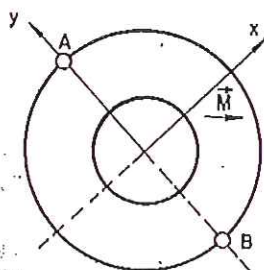


Fig. II-29

Por otra parte

$$I_x = I_y = \frac{\pi(40^4 - 20^4)}{4} = 18,846 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo estos valores en [II-10] resulta:

$$\sigma_z = M_x \cdot \frac{y}{I_x} = |\vec{M}| \cdot \frac{y}{18,846 \cdot 10^5}$$

Vemos que la máxima tensión de tracción aparece en A (fig. II-29) y la máxima de compresión en B y además en valor absoluto, ambas son iguales.

El máximo momento que podría soportar la sección sin romperse a compresión sería:

$$|\vec{M}| = \frac{200 \cdot 18,846 \cdot 10^5}{40} = 94,23 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

y el máximo momento que puede soportar la sección sin romperse a tracción sería:

$$|\vec{M}| = \frac{80 \cdot 18,846 \cdot 10^5}{40} = 37,692 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

El momento que puede soportar la sección sin romperse, será el menor de los dos valores anteriores, es decir, $37,692 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$.

*

EXPRESION [II-10] $\sigma_z = M_x \left[\frac{y I_{yy} - x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right] + M_y \left[\frac{y I_{xy} - x I_{xx}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right]$

14)

11 15)

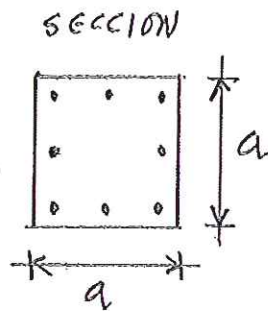
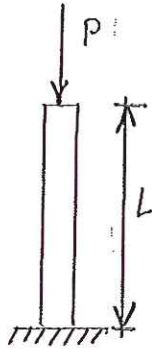
PROYECTO DOBLE TITULACION
 TEMA DE ESTRUCTURAS

FECHA 22/10/2010

HOJA N.º

4/4

PRÁCTICA VOLUNTARIA N.º 2



$$P = 1000 \text{ kN}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

$$a = 0,30 \text{ m}$$

$$\text{Redondos } \phi = 20 \text{ mm}$$

$$\text{Acero } A = 3,14 \text{ cm}^2$$

Módulos elasticidad:

$$\text{Acero } E_a = 200 \text{ GPa}$$

$$\text{HORMIGON } E_h = 25 \text{ GPa}$$

La columna de hormigón armado de la figura soporta una carga en su extremo superior. La sección es cuadrada y está armada con 8 redondos.

Se pide

- tensiones sobre hormigón y acero
- Achantamiento elástico de la columna

SOLUCION

PRACTICA VOLUNTARIA N° 2

SOLUCION 1

Area acero (8 redondos) $\Rightarrow A_a = 8 \times \pi \frac{22^2}{4} = 25 \text{ cm}^2$

Area hormigón $\Rightarrow A_h = 30 \times 30 - 25 = 875 \text{ cm}^2$

a)

El acero y el hormigón se deforman solidariamente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \epsilon_a = \epsilon_h$, aplicando la ley de Hooke ($\sigma = E \epsilon$), resulta $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_h}{E_h} \Rightarrow \sigma_a = \frac{E_a}{E_h} \sigma_h = \frac{200}{25} \sigma_h \Rightarrow \underline{\sigma_a = 8 \sigma_h}$

La carga P se puede descomponer como $\Rightarrow P = P_a + P_h$

$P_a = \text{carga en el acero} = \sigma_a \cdot A_a = 8 \sigma_h \cdot 25$

$P_h = \text{carga en el hormigón} = \sigma_h \cdot A_h = \sigma_h \cdot 875$

$P_a + P_h = P = 1000 \text{ kN.}$

$8 \sigma_h \cdot 25 + \sigma_h \cdot 875 = 1000 \text{ kN.} \Rightarrow \underline{\sigma_h = 9,30 \text{ MPa}}$

$\underline{\sigma_a = 8 \sigma_h = 74,42 \text{ MPa}}$

Tensiones en hormigón y acero

$P_a = \sigma_a A_a = \underline{186,05 \text{ kN}}$

$P_h = \sigma_h A_h = \underline{813,75 \text{ kN}}$

$\Sigma = P = 1000 \text{ kN.}$

b)

Ley de Hooke $\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \sigma \frac{l}{E}$

Como el acero y el hormigón se deforman solidariamente

$\Delta l_a = \Delta l_h = \Delta l \quad \Delta l = 9,30 \times \frac{5 \times 10^3}{25 \times 10^3} = 74,42 \frac{5 \times 10^3}{200 \times 10^3} = \underline{1,86 \text{ mm}}$

SOLUCION 2

Homogeneizamos el área de la columna de hormigón y acero a hormigón

Coefficiente de equivalencia del acero $n_a = \frac{E_a}{E_h} = 8$

$\Rightarrow$

Area homogeneizada $A_H = A_{\text{karboni}} + n_a A_{\text{aceró}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_H = 30 \times 30 - \frac{25}{A_a} + 8 \times 25 = 1075 \text{ cm}^2$$

a)

$$\sigma_H = \frac{P}{A_H} = \frac{1000 \times 10^3}{1075 \times 10^{-4}} = 9,30 \text{ MPa} \quad \text{Tensió en el karboni}$$

$$\sigma_a = n_a \sigma_H = 8 \times 9,30 = 74,42 \text{ MPa} \quad \text{" " " aceró}$$

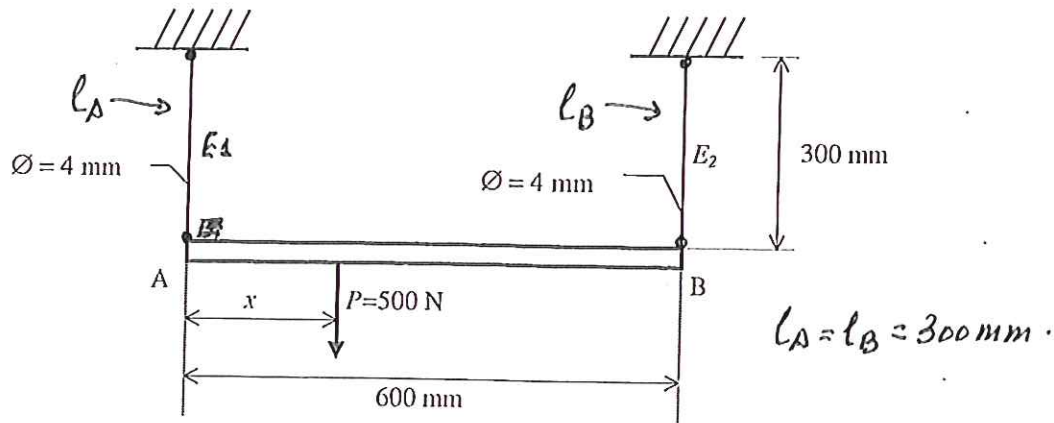
b)

$$\Delta l = \Delta l_a = \Delta l_H = \sigma_H \cdot \frac{e}{E_H} = 9,30 \times \frac{5 \times 10^3}{25 \times 10^8} = 1,86 \text{ mm}$$

~~17~~ 16)

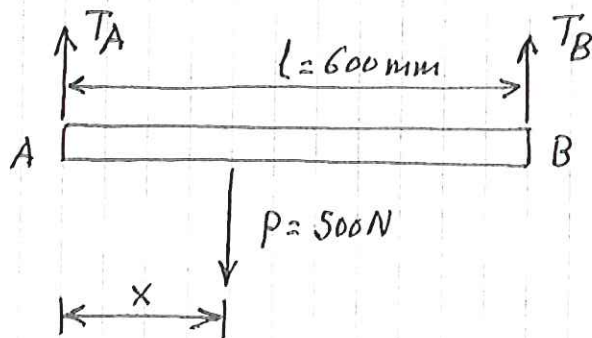
Tenemos una barra rígida que está suspendida por dos cables de igual diámetro $\varnothing = 4 \text{ mm}$, y cuyos módulos de elasticidad son: $E_1 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y $E_2 = 0.7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. La longitud de la barra es de 600 mm y la de los cables 300 mm. Se considera despreciable el peso propio de la barra. Dicha barra está sometida a una carga puntual $P = 500 \text{ N}$.

Calcular la posición x de la fuerza para que los puntos A y B tengan el mismo descenso.



Resolución:

Dibujamos el diagrama de sólido libre:



Los cables al no tener rigidez ejercen una fuerza en la dirección del cable.

Ecuaciones de la estática:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad T_A + T_B = P \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad T_B \cdot l - P \cdot x = 0 \quad (2)$$

la ecuación que falta la obtenemos de $\delta_A = \delta_B$ igualdad de descensos

ley de Hooke: $\sigma = \varepsilon \cdot E$; $\frac{T}{A} = \frac{\delta}{l} E \Rightarrow \delta = \frac{T \cdot l}{E \cdot A}$

$$F_A = \frac{T_A \cdot l_A}{E_1 \cdot A_A} = \frac{T_B \cdot l_B}{E_2 \cdot A_B}$$

$$A_A = A_B = \pi \frac{4^2}{4} \text{ mm}^2$$

$$l_A = l_B = 300 \text{ mm}$$

$$E_1 = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 0,7 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$T_A = 3 T_B \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones $x = 150 \text{ mm}$